BEILAGE Nr. 8
ZU DEN
MONATSBERICHTEN DES ÖSTERREICHISCHEN INSTITUTES FÜR KONJUNKTURFORSCHUNG
11. JAHRGANG, HEFT 11 — 25. NOVEMBER 1937

EXTRAPOLATION DES GLEITENDEN 12-MONATSDURCHSCHNITTES

VON
DR. A. WALD, WIEN

WIEN
IM SELBSTVERLAGE DES ÖSTERREICHISCHEN INSTITUTES FÜR KONJUNKTURFORSCHUNG, WIEN, I., STUBENRING 8—10

EXTRAPOLATION DES GLEITENDEN 12-MONATSDURCHSCHNITTES

von Dr. A. Wald

Zum Zwecke konjunkturtheoretischer Untersuchungen werden häufig aus gegebenen Zeitreihen ihre gleitenden 12-Monatsdurchschnitte gebildet. Es sei $\varphi(t)$ eine gegebene Zeitreihe, wobei wir annehmen wollen, daß die Werte von $\varphi(t)$ monatlich gegeben sind. Es bezeichne $\varphi_{i,k}$ den Wert von $\varphi(t)$ im k-ten Monat des i-ten Jahres. Allgemein für eine beliebige Zeitreihe $\Phi(t)$ bezeichne $\Phi_{i,k}$ den Wert von $\Phi(t)$ im k-ten Monat des i-ten Jahres. Bezeichnet man mit $\psi(t)$ den gleitenden 12-Monatsdurchschnitt von $\varphi(t)$, so gilt bekanntlich

$$(1) \quad \psi_{i,k} = \frac{\sum_{j=k-5}^{k+5} \varphi_{i,j} + \frac{1}{2}(\varphi_{i,k-6} + \varphi_{i,k+6})}{12},$$

wobei $\varphi_{i,j} = \varphi_{i-1,j+12}$ falls $j \leqq 0$, und $\varphi_{i,j} = \varphi_{i+1,j-12}$ falls $j > 12$ ist. Der gleitende 12-Monatsdurchschnitt wird im allgemeinen einen genügend glatten Verlauf aufweisen und er kann in vielen Fällen mit guter Annäherung als die von zufälligen und saisonmäßigen Schwankungen bereinigte Reihe angesehen werden. Der Konjunkturstatistiker interessiert sich vor allem für die von zufälligen und saisonmäßigen Schwankungen bereinigte Reihe und könnte zu diesem Zweck vielfach den gleitenden 12-Monatsdurchschnitt verwenden, wenn er nicht den Nachteil hätte, daß er für die letzten 6 Monate, für welche die Ursprungsreihe $\varphi(t)$ noch gegeben ist, nicht berechnet werden kann. Für konjunkturtheoretische Untersuchungen sind aber gerade die letzten Werte von besonderem Interesse. Um diesem Mangel abzuhelfen, wird hier eine Methode zur *Extrapolation* des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes entwickelt. Man kann natürlich nicht erwarten, daß die extrapolierten Werte mit den wirklichen Werten, die nach Ablauf von 6 Monaten auf Grund der hinzugekommenen 6 neuen Daten der Ursprungsreihe berechnet werden können, genau übereinstimmen. Jede Extrapolation ist mit einem gewissen Grad von Unsicherheit verbunden. Von einer brauchbaren Extrapolationsmethode kann man höchstens verlangen, daß sie in der großen Mehrheit der Fälle Werte liefert, welche den wirklichen Werten genügend nahe kommen. Gegen Ausnahmen ist man jedoch nie gesichert; auch bei der besten Extrapolationsmethode kann es vorkommen, daß manchmal größere Abweichungen auftreten.

Es seien nun die mathematischen Grundlagen der Extrapolationsmethode kurz dargelegt.

Es sei mit $s(t)$ die Saisonschwankung[1]) und mit $z(t)$ die Zufallsschwankung der Reihe $\varphi(t)$ bezeichnet. Die von den Zufalls- und Saisonschwankungen bereinigte Reihe sei mit $f(t)$ bezeichnet, also

$$(2) \qquad f(t) = \varphi(t) - s(t) - z(t).$$

In den meisten konjunkturstatistischen Reihen wird $f(t)$ einen ziemlich glatten Verlauf aufweisen und wird nicht wesentlich vom gleitenden 12-Monatsdurchschnitt abweichen. Wir machen daher die Annahme:

I. Es gilt $$\frac{\sum_{j=k-l}^{k+l} f_{i,j}}{2l+1} \sim \psi_{i,k},$$

wobei l eine beliebige natürliche Zahl $\geqq 2$ und $\leqq 5$ bedeutet. Das Zeichen $\sim$ bedeutet, daß die Gleichheit nur mit praktischer Annäherung gilt.

Bekanntlich kann die Saisonschwankung im allgemeinen nicht als eine exakt periodische Funktion mit der Periodenlänge von 12 Monaten vorausgesetzt werden. Es kann vor allem die Intensität, aber manchmal auch die Form der Saisonausschläge mit der Zeit sich langsam ändern. Die Intensitätsänderung der Saisonschwankung $s(t)$ kann dadurch ausgedrückt werden, daß $s(t)$ als das Produkt von zwei Funktionen $\lambda(t)$ und $p(t)$ dargestellt wird, wobei $p(t)$ eine exakt periodische Funktion mit der Periodenlänge von 12 Monaten, und $\lambda(t)$ eine mit der Zeit sich langsam ändernde, aber sonst beliebige Funktion

---

1) Um Mißverständnisse zu vermeiden sei hier bemerkt, daß unter Saisonschwankung p. D. die Differenz zwischen der Ursprungsreihe und ihrer saisonbereinigten Reihe gemeint wird, und nicht etwa das Verhältnis der beiden Reihen.

bedeutet[1]). Daß auch $p(t)$, also die Form der Saisonschwankung mit der Zeit sich langsam ändert, kommt seltener vor. Jedenfalls ist die Formveränderung der Saisonschwankung, wo sie auch stattfindet, im allgemeinen eine sehr langsame, so daß innerhalb eines Zeitraumes von etwa zwei Jahren dies vernachlässigt werden kann. Wir machen daher die Annahme:

II. Innerhalb eines Zeitraumes von zwei Jahren gilt

$$s(t) \sim \lambda(t)\, p(t),$$

wobei $p(t)$ eine exakt periodische Funktion mit der Periodenlänge von 12 Monaten ist und $\lambda(t)$ eine mit der Zeit sich langsam ändernde[2]) *aber sonst beliebige Funktion bedeutet.*

Über die Zufallsschwankung $z(t)$ setzen wir voraus:

III. Das arithmetische Mittel der Werte von $z(t)$ in m aufeinanderfolgenden Monaten ist annähernd gleich o, also

$$\frac{\sum\limits_{j=k+1}^{k+m} z_{i,j}}{m} \sim 0.$$

Die Annahme III wird im allgemeinen um so besser erfüllt sein, je größer m ist. In vielen Fällen wird man die Annahme III auch für $m = 5$ postulieren können, für $m = 7$ wird sie in den meisten Fällen mit praktischer Annäherung erfüllt sein.

Ausgehend von den Annahmen I bis III wird nachstehend eine Extrapolationsmethode entwickelt.

Es seien die Werte des gleitenden Durchschnittes $\psi(t)$ bis zum Zeitpunkte $t_{i,k}$ (k-ter Monat des i-ten Jahres) bekannt, d. h. die Ursprungsreihe ist bis zum Zeitpunkt $t_{i,k+6}$ gegeben. Die Aufgabe ist, auf Grund der gegebenen Daten möglichst gute Annäherungswerte für die zukünftigen 6 Werte $\psi_{i,k+1}, \ldots, \psi_{i,k+6}$ des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes zu finden. Die Annäherungswerte wollen wir zum Unterschiede von den exakten Werten mit $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+6}$ bezeichnen.

Um die Werte $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+6}$ zu bestimmen, bilden wir zunächst für $l = 2, 3, 4, 5$ das arithmetische Mittel $a_{i,l}$ der letzten $2l+1$-Monatswerte der Ursprungsreihe $\varphi(t)$, also

$$(3) \qquad a_{i,l} = \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} \varphi_{i,j}}{2l+1}.$$

Wegen (2) gilt offenbar

$$a_{i,l} = \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} f_{i,j}}{2l+1} + \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i,j}}{2l+1} + \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} z_{i,j}}{2l+1}.$$

Aus den Annahmen I und III folgt dann

$$(4) \qquad a_{i,l} \sim \psi_{i,k+6-l} + \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i,j}}{2l+1},$$

vorausgesetzt, daß die Gültigkeit von III schon für $m = 5$ angenommen wird. Nimmt man an, daß III nur für $m \geqq 7$ gilt, dann gilt (4) nur für $l = 3, 4, 5$.

Um den Wert von $\psi_{i,k+6-l}$ abzuschätzen, haben wir gemäß (4) bloß den Wert des Ausdruckes $\frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i,j}}{2l+1}$ annäherungsweise zu bestimmen. Es gilt offenbar die zu (4) analoge Beziehung

$$(5) \quad a_{i-1,l} = \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} \varphi_{i-1,j}}{2l+1} \sim \psi_{i-1,k+6-l} + \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i-1,j}}{2l+1},$$

also

$$(6) \quad \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i-1,j}}{2l+1} \sim a_{i-1,l} - \psi_{i-1,k+6-l}.$$

Die in III postulierte langsame Änderung von $\lambda(t)$ wird dahin präzisiert, daß die Gültigkeit der Beziehung

$$(7) \quad \frac{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i,j}}{\sum\limits_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i-1,j}} \sim \frac{\sum\limits_{j=k-5}^{k+6} |s_{i,j}|}{\sum\limits_{j=k-5}^{k+6} |s_{i-1,j}|} \qquad (l = 2, 3, 4, 5)$$

angenommen wird. Die obige Beziehung gilt offenbar um so genauer, je langsamer die Änderung von $\lambda(t)$ ist. Sind die Saisonschwankungen groß gegenüber den Zufallsschwankungen und groß gegenüber der Änderung des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes während eines Jahres, so kann die rechte Seite von (7) annäherungsweise dem Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i,j} - \psi_{i,k}|}{\sum\limits_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i-1,j} - \psi_{i-1,k}|}$$

gleichgesetzt werden. Es gilt dann wegen (7)

---

[1]) Eine genauere Ausführung dieser Idee befindet sich in meinem Buche: Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen, Wien 1936.

[2]) Die langsame Änderung von $\lambda(t)$ wird in der Weise verwendet und präzisiert, daß zwei Ausdrücke einander gleichgesetzt werden, die mit um so größerer Genauigkeit einander gleich sind, je langsamer $\lambda(t)$ sich ändert.

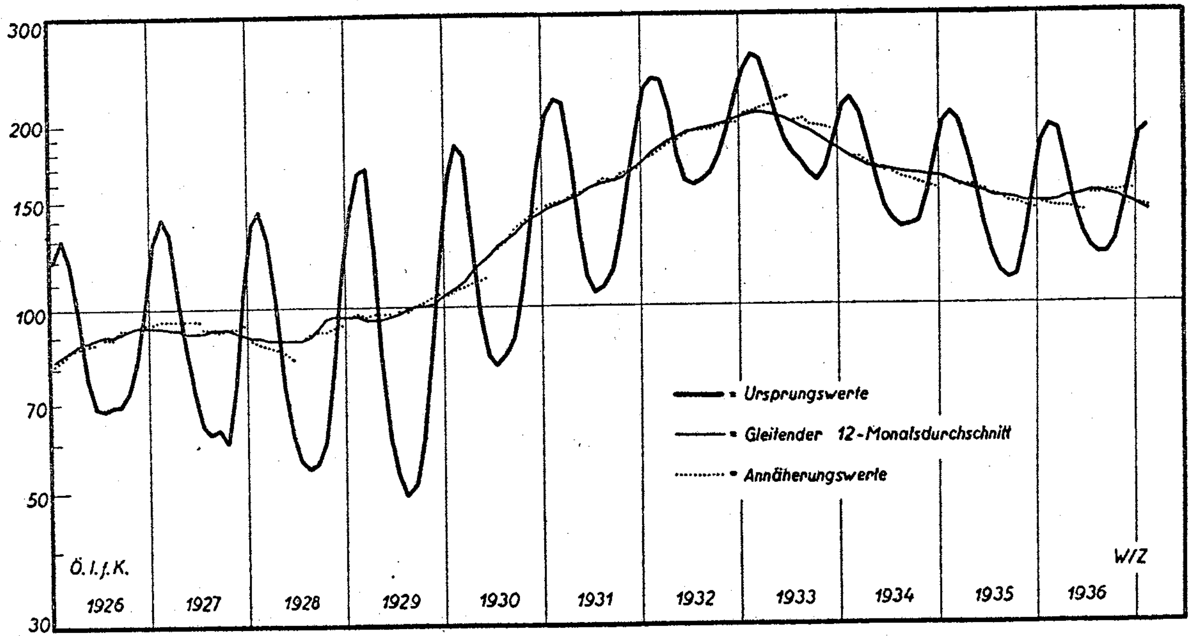
$$(8)\quad \frac{\sum_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i,j}}{\sum_{j=k+6-2l}^{k+6} s_{i-1,j}} \sim \frac{\sum_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i,j} - \psi_{i,k}|}{\sum_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i-1,j} - \psi_{i-1,k}|}.$$

Aus (4), (6) und (8) ergibt sich dann

$$(9)\quad \psi_{i,k+6-l} \sim a_{i,l} - \frac{\sum_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i,j} - \psi_{i,k}|}{\sum_{j=k-5}^{k+6} |\varphi_{i-1,j} - \psi_{i-1,k}|} (a_{i-1,l} - \psi_{i-1,k+6-l}) = \psi^*_{i,k+6-l}.$$

Die Formel (9) ist gültig für $l = 3, 4, 5$ falls die Gültigkeit von III für $m \geqq 7$ vorausgesetzt wird. Ist III auch für $m = 5$ gültig, so gilt (9) auch für $l = 2$. Dagegen kann für $l = 0$ und $l = 1$ die Gültigkeit von (9) nicht angenommen werden, da III für $m \leqq 3$ im allgemeinen kaum erfüllt sein wird. Es besteht daher die Aufgabe $\psi^*_{i,k+5}$, $\psi^*_{i,k+6}$ und in den Fällen wo die Gültigkeit von III für $m = 5$ nicht vorausgesetzt wird, auch $\varphi^*_{i,k+4}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke empfiehlt sich folgendermaßen vorzugehen: man bestimme die Gerade (bzw. Parabel zweiten Grades, wenn größere Genauigkeit erwünscht ist), welche die letzten 5 Werte $\psi_{i,k}$, $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+4}$ (bzw. $\psi_{i,k-1}$, $\psi_{i,k}$, $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+3}$ falls $\psi^*_{i,k+4}$ nicht nach (9) berechnet wird) des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes am besten annähert (etwa die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum ist). Die Werte $\psi^*_{i,k+5}$, $\psi^*_{i,k+6}$ (bzw. $\varphi^*_{i,k+4}$, $\psi^*_{i,k+5}$, $\psi^*_{i,k+6}$) werden den entsprechenden Punkten dieser Geraden (bzw. Parabel) gleichgesetzt. Diese Extrapolation rechtfertigt sich durch den Umstand, daß in einem kurzen Zeitintervall von etwa 7 Monaten der gleitende 12-Monatsdurchschnitt im allgemeinen durch eine Gerade (bzw. Parabel) gut angenähert werden kann. Jedenfalls erhält man viel genauere Werte, als wenn man $\psi^*_{i,k+5}$ und $\psi^*_{i,k+6}$ auf Grund der Formel (9) berechnen würde, da dies nur dann zulässig wäre, wenn III auch für $m \leqq 3$ gelten würde, was aber im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann. Daß die Gerade (bzw. die Parabel) auf Grund von eben 5 Werten bestimmt wird, dürfte deswegen zweckmäßig sein, weil einerseits weniger als 5 Werte die Entwicklungstendenz des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes nicht genügend gut wiedergeben würden, anderseits mehr als 5 Werte zu verwenden den Nachteil hätte, daß die Annäherung durch die Gerade (bzw. Parabel) auf einen allzu großen Zeitraum erstreckt wird. Man könnte nun fragen, ob man nicht auch dann genügend genaue Werte für $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+6}$ erhält, wenn man zur Berechnung derselben (9) gar nicht verwendet, sondern alle 6 Werte $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+6}$ so bestimmt werden, daß man eine gewisse Anzahl der unmittelbar vorangehenden Monatswerte des gleitenden 12-Monatsdurchschnittes durch eine Gerade (bzw. Parabel) annähert und die Werte $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+6}$ den entsprechenden Punkten dieser Geraden (bzw. Parabel) gleichsetzt. Dies wird im allgemeinen, wie an Hand praktischer Beispiele gezeigt werden kann, nicht der Fall sein. Erstens erhöht sich die Ungenauigkeit

Vergleich zwischen gleitendem 12-Monatsdurchschnitt und Annäherung
(logarithmischer Maßstab; in 1000 Einheiten)



wesentlich dadurch, daß statt 2 (bzw. 3), 6 Werte auf diese Weise zu extrapolieren sind, zweitens auch dadurch, daß die Annäherung von $\psi(t)$ durch eine Gerade (bzw. Parabel) auf einen längeren Zeitraum erstreckt werden muß.

Wir wollen den ganzen Rechengang an einem Beispiel veranschaulichen. In der folgenden Tabelle sind die Ursprungswerte der unterstützten Arbeitslosen für Österreich ohne Wien vom Juni 1929 bis Juni 1931 und der gleitende 12-Monatsdurchschnitt vom Dezember 1929 bis Dezember 1930 angegeben.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1929						61	53	49	51	60	84	120
												103
1930	164	183	176	128	97	83	80	83	88	103	132	168
	105	107	110	114	117	121	125	128	131	135	139	141
1931	205	219	215	177	132	112						

Wir wollen die Gültigkeit von III nur für $m \geqq 7$ voraussetzen und mithin werden wir nur $\psi^*_{i,k+1}$, $\psi^*_{i,k+2}$ und $\psi^*_{i,k+3}$ auf Grund von (9) berechnen. Der letzte Zeitpunkt, in dem $\psi(t)$ noch bekannt ist, ist der Dezember 1930. Also ist in der Formel (9) $i = 1930$ und $k = 12$ zu setzen.

Zunächst berechnen wir $a_{1930,l}$ für $l = 3, 4, 5$. Nach Formel (3) ist $a_{1930,l}$ nichts anderes als das arithmetische Mittel der letzten $2l+1$-Monatswerte der Ursprungsreihe, also

$a_{1930,3} = 175{\cdot}4$; $a_{1930,4} = 162{\cdot}6$; $a_{1930,5} = 148{\cdot}5$.

Die entsprechenden Durchschnitte $a_{1929,3}$, $a_{1929,4}$, $a_{1929,5}$ werden aus den um ein Jahr zurückliegenden Werten gebildet, also

$a_{1929,3}$ = arithmetisches Mittel der 7 Ursprungswerte von Dezember 1929 bis Juni 1930 = 135·9;

$a_{1929,4}$ = arithmetisches Mittel der 9 Ursprungswerte von Oktober 1929 bis Juni 1930 = 121·7;

$a_{1929,5}$ = arithmetisches Mittel der 11 Ursprungswerte von August 1929 bis Juni 1930 = 108·6.

Man bildet dann die Differenzen

$$a_{1929,5} - \psi_{i-1,k+6-5} = a_{1929,5} - \psi_{1929,13} = \\ = a_{1929,5} - \psi_{1930,1} = 3{\cdot}6 = d_1;$$

$$a_{1929,4} - \psi_{i-1,k+6-4} = a_{1929,4} - \psi_{1929,14} = \\ = a_{1929,4} - \psi_{1930,2} = 14{\cdot}7 = d_2;$$

$$a_{1929,3} - \psi_{i-1,k+6-3} = a_{1929,3} - \varphi_{1929,15} = \\ = a_{1929,3} - \psi_{1930,3} = 25{\cdot}9 = d_3.$$

Wir berechnen nun die Ausdrücke

$$\sum_{j=k-5}^{k+6} \left| \varphi_{1930,j} - \psi_{1930,12} \right| = \\ = \sum_{j=12-5}^{12+6} \left| \varphi_{1930,j} - \psi_{1930,12} \right| = 536 \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=k-5}^{k+6} \left| \varphi_{1929,j} - \psi_{1929,12} \right| = \\ = \sum_{=12-5}^{12+6} \left| \varphi_{1929,j} - \psi_{1929,12} \right| = 500.$$

Mit dem Verhältnis $\lambda = \frac{536}{500} = 1{\cdot}07$ dieser Zahlen multiplizieren wir die Differenzen d_1, d_2, d_3. Man erhält dann

$$\lambda d_1 = d'_1 = 3{\cdot}85; \; \lambda d_2 = d'_2 = 15{\cdot}73; \\ \lambda d_3 = d'_3 = 27{\cdot}71.$$

Gemäß (9) ist dann

$$\psi^*_{i,k+1} = \psi^*_{1930,13} = \psi^*_{1931,1} = a_{1930,5} - d'_1 = 144{\cdot}65$$
$$\psi^*_{i,k+2} = \psi^*_{1930,14} = \psi^*_{1931,2} = a_{1930,4} - d'_2 = 146{\cdot}87$$
$$\psi^*_{i,k+3} = \psi^*_{1930,15} = \psi^*_{1931,3} = a_{1930,3} - d'_3 = 147{\cdot}69$$

Um die Werte von ψ^* in den Monaten April, Mai, Juni 1931 zu berechnen, bestimmen wir die Gerade, für welche die Summe der Abweichungsquadrate von den 5 Werten $\psi_{1930,11}$, $\psi_{1930,12}$, $\psi^*_{1931,1}$, $\psi^*_{1931,2}$, $\psi^*_{1931,3}$ ein Minimum wird. Bekanntlich ist die Steigung Δ dieser Geraden durch die Formel gegeben

$$\Delta = \frac{2(\psi^*_{1931,3} - \psi_{1930,11}) + (\psi^*_{1931,2} - \psi_{1930,12})}{10} = 2{\cdot}32$$

Bezeichnet man das arithmetische Mittel der 5 Werte $\psi_{1930,11}$, $\psi_{1930,12}$, $\psi^*_{1931,1}$, $\psi^*_{1931,2}$ und $\psi^*_{1931,3}$ mit μ, so ist der Wert dieser Geraden im April, bzw. Mai, bzw. Juni 1931 gleich $\mu + 3\Delta$, bzw. $\mu + 4\Delta$, bzw. $\mu + 5\Delta$. Es gilt daher

$$\psi^*_{1931,4} = \mu + 3\Delta = 150{\cdot}8$$
$$\psi^*_{1931,5} = \mu + 4\Delta = 153{\cdot}12$$
$$\psi^*_{1931,6} = \mu + 5\Delta = 155{\cdot}44$$

Untenstehend sind die wirklichen Werte ψ und die extrapolierten Werte ψ^* nebeneinander gestellt. Die wirklichen Werte ψ wurden mit Verwendung von 6 weiteren Ursprungswerten (von Juli 1931 bis Dezember 1931) berechnet.

$\psi_{1931,1} = 144$; $\psi^*_{1931,1} = 145$;
$\psi_{1931,2} = 146$; $\psi^*_{1931,2} = 147$;
$\psi_{1931,3} = 148$; $\psi^*_{1931,3} = 148$;
$\psi_{1931,4} = 150$; $\psi^*_{1931,4} = 151$;
$\psi_{1931,5} = 152$; $\psi^*_{1931,5} = 153$;
$\psi_{1931,6} = 155$; $\psi^*_{1931,6} = 155$.

Die Übereinstimmung ist in diesem Falle ausgezeichnet gut. In der folgenden Tabelle geben wir für die Reihe der unterstützten Arbeitslosen für Österreich ohne Wien die Ursprungswerte φ, die gleitenden 12-Monatsdurchschnitte ψ und deren nach obiger Methode berechneten Annäherungswerte ψ^* an.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1926	φ	120	130	118	97	77	69	68	69	69	73	82	101
	ψ	82	84	85	87	88	89	90	90	91	92	93	93
	ψ^*	81	83	85	86	87	88	89	89	92	92	93	94
1927	φ	128	140	132	104	85	73	64	62	63	60	74	106
	ψ	93	93	92	92	91	91	91	92	92	92	91	90
	ψ^*	94	95	95	95	95	95	92	92	91	92	92	93
1928	φ	137	143	129	101	74	62	56	54	55	60	77	110
	ψ	89	89	88	88	88	88	88	89	92	95	96	96
	ψ^*	88	87	86	85	84	82	88	90	91	91	92	93
1929	φ	143	165	168	124	82	61	53	49	51	60	84	120
	ψ	96	96	95	95	95	96	97	99	100	100	101	103
	ψ^*	96	97	96	97	97	97	98	98	100	101	103	104
1930	φ	164	183	176	128	97	83	80	83	88	103	132	168
	ψ	105	107	110	114	117	121	125	128	131	135	139	141
	ψ^*	104	106	107	109	110	112	124	127	133	136	140	144
1931	φ	205	219	215	177	132	112	105	107	114	131	160	197
	ψ	144	146	148	150	152	155	157	159	160	162	165	169
	ψ^*	145	147	148	151	153	155	157	161	160	164	166	168
1932	φ	228	234	233	208	176	160	157	160	164	176	194	220
	ψ	173	178	182	186	189	192	193	195	196	198	200	202
	ψ^*	173	176	180	184	187	191	193	194	195	197	198	199
1933	φ	243	255	251	229	203	187	177	171	164	160	167	188
	ψ	204	205	206	205	203	201	198	195	192	188	184	181
	ψ^*	205	207	210	212	215	218	200	201	196	196	195	193
1934	φ	212	217	206	183	161	144	137	133	134	135	150	173
	ψ	177	174	171	169	167	166	165	164	163	163	162	162
	ψ^*	177	174	174	170	168	165	163	161	160	158	156	154
1935	φ	199	206	200	178	156	135	121	113	110	111	129	156
	ψ	161	159	157	155	153	152	150	150	149	148	147	147
	ψ^*	160	159	156	156	154	153	151	150	147	147	145	144
1936	φ	184	197	193	169	145	131	124	120	120	127	143	166
	ψ	147	147	148	149	150	151	152	152	151	150	148	146
	ψ^*	146	145	144	144	143	142	151	151	152	152	153	153
1937	φ	190	193										
	ψ	144	142										
	ψ^*	145	143										

In der Abbildung Seite V sind die drei Reihen graphisch dargestellt. Die Reihe ψ^* bildet hier keine stetig fortlaufende Reihe, sie repräsentiert vielmehr 22 verschiedene Beispiele für die Extrapolation. Jedes Halbjahr, von Jänner bis Juni, bzw. von Juli bis Dezember, stellt ein gesondertes Beispiel dar, da die Werte von ψ^* von Jänner bis Juni in jedem Jahr so berechnet wurden, daß die Ursprungswerte bis Juni des betreffenden Jahres (und mithin ψ bloß bis Dezember des vorhergehenden Jahres) als bekannt vorausgesetzt wurden, und die Werte ψ^* von Juli bis Dezember dagegen so berechnet wurden, daß die Ursprungswerte bis Dezember des betreffenden Jahres (und mithin ψ bis Juni des betreffenden Jahres) als bekannt vorausgesetzt wurden.

Wie aus der Figur und der Tabelle II ersichtlich ist, liefern die 22 Beispiele zufriedenstellende Ergebnisse, abgesehen von 4 Fällen, wo größere Abweichungen zwischen ψ und ψ^* auftreten und zwar tritt dies in den ersten Hälften der Jahre 1930, 1933, 1936 und in der zweiten Hälfte von 1933 ein. Das ungünstige Ergebnis von 1933 erklärt sich dadurch, daß im Jahre 1933 eine plötzliche starke Verschiebung des Tiefpunktes der Saisonbewegung stattfindet. Auch in den Jahren 1930 und 1936 tritt eine gewisse unregelmäßige Änderung in der Saisonbewegung auf. Wie eingangs erwähnt wurde, kann von keiner Extrapolationsmethode erwartet werden, daß sie immer gute Ergebnisse liefere. Es besteht immer die Möglichkeit, daß eine Zeitreihe zufolge besonderer Umstände plötzlich ihren Verlauf ändert. In solchen Fällen versagt dann jede Extrapolation. Die Brauchbarkeit einer Extrapolationsmethode ist bereits gegeben, wenn sie in der großen Mehrzahl der Fälle gute Ergebnisse liefert, und mehr als dies kann man von ihr gar nicht verlangen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß bei Reihen, wo keine Saisonschwankungen auftreten, die Extrapolation von ψ wesentlich einfacher ist. In diesem Falle folgt nämlich aus (4)

$$(4') \quad \psi_{i,k+6-l} \sim a_{i,l} = \psi^*_{i,k+6-l} \qquad (l = 2, 3, 4, 5).$$

Die Werte $\psi^*_{i,k+5}$, $\psi^*_{i,k+6}$ (falls (4′) für $l = 2$ nicht verwendet wird, auch $\psi^*_{i,k+4}$) werden so berechnet, daß man die 5 Werte $\psi_{i,k-1}$, $\psi_{i,k}$, $\psi^*_{i,k+1}$, $\psi^*_{i,k+2}$, $\psi^*_{i,k+3}$ (bzw. die Werte $\psi_{i,k}$, $\psi^*_{i,k+1}, \ldots, \psi^*_{i,k+4}$) durch eine Gerade (Parabel) approximiert und die Werte $\psi^*_{i,k+5}$, $\psi^*_{i,k+6}$ (bzw. auch $\psi^*_{i,k+4}$) den entsprechenden Punkten dieser Geraden (Parabel) gleichsetzt.